Mathematik für Klasse 6/7

Prozentrechnen

Teil 2 Anwendungen in Sachaufgaben

Datei Nr. 10552

Stand 26. Mai 2014

Friedrich Buckel

INTERNETBIBLIOTHEK FÜR SCHULMATHEMATIK

www.mathe-cd.de

Vorwort

Diese neue Fassung des Textes wurde unter didaktischen Gesichtspunkten verkürzt und verbessert.

In vorliegendem 2. Teil stehen Anwendungen in Sachaufgaben.

Die Grundlagen findet man im Text 10551.

Inhalt

Sachaufgaben

Prozentuale Zunahme und Abnahme

1 Preiserhöhungen

Stets liegt dasselbe Prinzip vor, das an einem Musterbeispiel erläutert werden soll:

Ein Preis wird um 6 % erhöht. Wie berechnet man den neuen Preis?

1. Methode:

$$\boxed{\text{Alter Preis}} + \boxed{\text{Preiserhöhung}} = \boxed{\text{Neuer Preis}}$$

$\boxed{100\%}$ $\boxed{\text{um } p = 6\%}$ $\boxed{106\%}$

2. Methode:

$$\boxed{\text{Alter Preis}} \xrightarrow[\boxed{\cdot q = 1{,}06}]{} = \boxed{\text{Neuer Preis}}$$

Diese 2. Methode beruht einfach darauf, dass 106% $= \frac{106}{100} = 1{,}06$ sind.

Für Interessierte noch kurz diese Herleitung der 2. Methode:

Neupreis = Alter Preis + Preiserhöhung)

d. h. $N = A + A \cdot p$

Ausklammern von A: $\boxed{N = A \cdot (1 + p) = A \cdot q}$

q nennt man den Zunahme- oder **Wachstumsfaktor**.

Mit p = 0,6 folgt q = 1,06: $N = A \cdot 1{,}06$

Beispiel 1

1 DVD-Player kostet 124 €. Der Konzern beschließt eine Erhöhung um 6 %.

Man setzt den alten Preis als 100% an. Er ist der Grundwert, auf den sich die 6 % Preiserhöhung beziehen.

Nach der 1. Methode berechnet man die Preiserhöhung und addiert:

Alter Preis:		124,00 €
Preiserhöhung:	+ 124 € · 0,06 =	7,44 €
Neuer Preis:		131,44 €

Nach der 2. Methode beträgt der um 6 % erhöhte neue Preis 106 % vom alten Preis (Grundwert), also kann man diese Rechnung in einer Zeile durchführen:

Neuer Preis: $124\text{ €} \boxed{\cdot 1{,}06} = 131{,}44\text{ €}$

Beispiel 2

Der Preis eines Fahrrads hat sich von 200 € aus um 5 % verteuert.
Wie hoch ist der neue Preis?

Löse zunächst selbständig!

Lösung

1. Methode: Man berechnet die Preiserhöhung und addiert sie zum alten Preis:

5% von $200\ € = 0{,}05 \mid \cdot 2\boxed{00}\ € = 5 \cdot 2\ € = 10\ €$

Alter Preis:	200 €
Aufschlag:	10 €
Neuer Preis:	210 €

2. Methode: Zum alten Preis (der 100 % entspricht), kommen noch 5 % Aufschlag dazu, so dass der neue Preis 105 % des alten entspricht.

Der Zunahme- oder Wachstumsfaktor ist q = 1,05:

Neuer Preis = $200\ € \cdot 1{,}05 = 210\ €$

Kopfrechen-Tipp: Führe einen Stellenausgleich durch:

105% von $200\ € = 1{,}05 \mid \cdot 2\boxed{00}\ € = 105 \cdot 2€ = 210\ €$

2 Preisnachlass, Rabatt

Ein Preis wird um 15 % gesenkt. Wie berechnet man den neuen Preis?

1. Methode:

$$\boxed{\text{Alter Preis}} - \boxed{\text{Preissenkung}} = \boxed{\text{Neuer Preis}}$$

$\boxed{100\%}$ $\boxed{\text{um } p = 15\%}$ $\boxed{85\%}$

2. Methode:

$$\boxed{\text{Alter Preis}} \xrightarrow[\boxed{\cdot q = 0{,}85}]{} = \boxed{\text{Neuer Preis}}$$

Diese 2. Methode beruht einfach darauf, dass $106\% = \frac{106}{100} = 1{,}06$ sind.

Für Interessierte noch kurz diese Herleitung der 2. Methode:

Neupreis = Alter Preis - Preissenkung)

d. h. $N = A - A \cdot p$

Ausklammern von A: $\boxed{N = A \cdot (1 - p) = A \cdot q}$

q nennt man jetzt den **Abnahmefaktor** (oder auch wieder Wachstumsfaktor).

Mit p = 0,15 folgt q =0,85: $N = A \cdot 0{,}85$

Beispiel 3

Der Preis eines Fahrrads wurde von 200 € aus um 15 % gesenkt. Wie hoch ist der neue Preis?

Lösung

1. Methode: Man berechnet den Preisnachlass und subtrahiert diesen vom alten Preis:

$$15\% \text{ von } 200\ € = 0{,}\underline{15} \mid \cdot 2\boxed{00}\ € = 15 \cdot 2\ € = 30\ €$$

Alter Preis:	200 €	100%
Abschlag:	30 €	15%
Neuer Preis:	170 €	85%

2. Methode: Vom alten Preis (der 100 % entspricht), gehen 15 % Abschlag weg, so dass der neue Preis 85 % des alten entspricht.
Der Abnahmefaktor ist daher q = 1 – 0,15 = 0,85

Neuer Preis = $85\% \text{ von } 200\ € = 0{,}\underline{85} \mid \cdot 2\boxed{00}\ € = 85 \cdot 2€ = 170\ €$

Man sollte stets mit dieser 2. Methode arbeiten!

Beispiel 4

Bei Erneuerungsarbeiten wurde eine Rennstrecke um 18% verkürzt. Ihre ursprüngliche Länge betrug 2480 m. Wie lang ist sie jetzt?

Lösung

Die ursprüngliche Länge entspricht 100%, Nach Verkürzung um 18% beträgt die neue Länge noch 82% der alten Länge.

Abnahmefaktor: q = 1 – 0,18 = 0,82

Neue Länge: $2480\ \text{m} \cdot 0{,}82 = 2033{,}6\ \text{m}$.

Beispiel 5

Ein Läufer benötigt für 100 m die Zeit 11,5 s. Er trainiert weiter und behauptet zwei Wochen später, dass er seine Zeit um 8% senken konnte. Wie lang hat er dann für 100 m gebraucht?

Lösung

Abnahmefaktor: q = 1 – 0,08 = 0,92

Neue Zeit $t = 11{,}5\ \text{s} \cdot 0{,}92 = 10{,}58\ \text{s}$

Ob man das glauben kann?

Beispiel 6: **Der alte Preis A wird um den Prozentsatz p gesenkt. Berechne den neuen Preis N.**

Abnahme um p = 5%:	Abnahmefaktor q = 0,95.	$N = A \cdot 0{,}95$
Abnahme um p =10%:	Abnahmefaktor q = 0,9	$N = A \cdot 0{,}9$
Abnahme um p = 20%	Abnahmefaktor q = 0,8	$N = A \cdot 0{,}8$
Abnahme um p = 37%	Abnahmefaktor q = 0,63	$N = A \cdot 0{,}63$

Grundprinzip für Zunahme und Abnahme

Gegeben ist der Grundwert (alter Preis) A und der Prozentsatz p der Änderung.

Dann berechnet man die <u>Änderung</u> (Preiserhöhung oder Preisabnahme) durch

$$W = A \cdot p$$

und den <u>Endpreis</u> durch $E = A \cdot q$

wobei q der <u>Änderungsfaktor</u> (Wachstumsfaktor) ist.

Dieser ist bei Zunahme $q = 1 + p$

und bei Abnahme $q = 1 - p$.

Aufgabe 1

(Lösung Seite 28)

a) Ein Anzug kostet nach 20 % Preisnachlass noch 240 €. Wie teuer war er zuvor?

b) Es gab einen Preisaufschlag um 10 %. Die Hose kostet daher nun 93,50 €.
Was hat sie zuvor gekostet?

c) Bei einer Hose wird der Verkaufspreis um 25 % herabgesetzt.
Sie kostete ursprünglich 78 €. Berechne den neuen Preis.

d) Benzin hat innerhalb von 2 Monaten von 1,184 € pro Liter um 15 % aufgeschlagen.
Wie war dann vorher der Verkaufspreis pro Liter?

e) Eine Dose Kaffee kostet 4,50 €. Man füllt nun 24 % mehr ein, wie teuer wird sie nun verkauft?

f) Ein CD-Player kostet noch 35,20 €. Dafür wurde der Preis um 20 % gesenkt.
Berechne den alten Preis.

3 Der Ärger mit der Mehrwertsteuer

Beispiel 7

Ein Laptop kostet ***netto*** 784 €. Dies ist der Preis ***ohne Mehrwertsteuer***.

Der Händler, der den Laptop verkauft, darf nur diesen Betrag als Einnahme verbuchen. Für den Verkauf ist er verpflichtet, die sogenannte Mehrwertsteuer (das ist bei den meisten Geräten der zu 19% gehörende Prozentwert) vom Käufer zu verlangen. Er muss sie aber ans Finanzamt überweisen. Er berechnet diese **Mehrwertsteuer** so:

19% von 784 € sind $W = 784\ € \boxed{\cdot 0{,}19} = 148{,}96\ €$.

Damit erhöht sich der Nettopreis um diesen Betrag zum **Bruttopreis**, den der Kunde bezahlen muss. Dieser beträgt dann

Nettopreis	784,00 €
Mehrwertsteuer	148,96 €
Bruttopreis:	932,96 €

100%	= 1
19%	= p
119%	= 1+p

Diese Rechnung lässt sich in einer Zeile erledigen, wenn man sich klar macht, dass der Bruttopreis 119% des Nettopreises beträgt. Der Mehrwertsteuerfaktor ist also q = 1,19.

$\boxed{\text{Bruttopreis}} = \boxed{\text{Nettopreis}} \cdot \boxed{1{,}19}$

Bruttopreis: $784\ € \boxed{\cdot 1{,}19} = 932{,}96\ €$

Zur Erinnerung: Dahinter steckt die Prozentformel: $\boxed{W = G \cdot \underbrace{(1+p)}_{q}}$

Wenn p der Prozentsatz der Mehrwertsteuer ist, dann ist q = 1+q der so genannte Wachstumsfaktor für den Bruttobetrag.

Der Nettobetrag wird also bei einem Mehrwertsteuersatz von 19% mit dem Faktor 1,19 multipliziert.

Bei vielen Artikeln (z. B. Lebensmitteln) ist der Mehrwertsteuersatz 7%, dann gilt der Wachstumsfaktor q = 1,07

Beispiel 8

250 g Butter kosten netto 1,31 €. Bei 7% Mehrwertsteuer ergibt das einen Verkaufspreis (brutto) von $1{,}31\ € \cdot 1{,}07 \approx 1{,}40\ €$

Die darin enthaltene Mehrwertsteuer ist $1{,}31\ € \cdot 0{,}07 \approx 0{,}09\ €$.

Dieser Betrag ist natürlich die Differenz aus Bruttobetrag und Nettobetrag!

Beispiel 9

Eine externe Festplatte kostet netto 84 €. Wie groß ist der Kaufpreis, wenn die Mehrwertsteuer 19% beträgt?

Lösung:

	Nettopreis:	N = 84 €
	Bruttopreis:	$B = 84\ € \cdot 1{,}19 = 99{,}96\ €$
	Mehrwertsteuer:	$M = 84\ € \cdot 0{,}19 = 15{,}96\ €$
Oder so:	Nettopreis:	N = 84 €
	Mehrwertsteuer:	$M = 84\ € \cdot 0{,}19 = 15{,}96\ €$
	Bruttopreis:	$B = N + M = 84\ € + 15{,}96\ € = 99{,}96\ €$

Die umgekehrte Aufgabenstellung ist komplizierter:

Beispiel 10

Ein Fahrrad kostet 289 €. **Wie hoch ist die enthaltene Mehrwertsteuer?**

Lösung:

Der Bruttopreis beträgt 289 €. Er enthält einen Anteil von 19 %, beträgt also 119% des Nettopreises, der immer der Grundwert (100%) ist. Den Prozentwert erhält man aus dem Grundwert durch Multiplikation mit 1,19. Umgekehrt dividiert man durch 1,19:

$G = 289\ € \boxed{:1{,}19} \approx 242{,}86\ €$.

Zur Erinnerung:

Aus $W = G \cdot q$ folgt $G = \frac{W}{q}$

Der Mehrwertsteueranteil beträgt dann
davon 19% also $242{,}86\ € \cdot 0{,}19 = 46{,}14\ €$

Dies ist auch ganz einfach die Differenz aus Brutto- und Nettobetrag.

Beispiel 11

Eine Lieferung CD-Rohlinge kostet 142,80 €.
Der Käufer darf den darin enthaltenen Mehrwertsteuerbetrag vom Finanzamt zurückfordern (bzw. bei seiner Steuerabrechnung abziehen). Wie hoch ist diese Mehrwertsteuer?

Lösung:

Bruttopreis: $B = 142{,}80\ €$

Nettopreis: $N = \frac{B}{q} = \frac{142{,}80}{1{,}19}\ € = 120\ €$

Mehrwertsteuer : $M = N \cdot p = 120\ € \cdot 0{,}19 = 22{,}80\ €$

Oder in einer einzigen Rechnung: $M = \frac{B}{q} \cdot p = \frac{142{,}80}{1{,}19} \cdot 0{,}19\ € = 22{,}80\ €$

Oder: $M = B - N = 142{,}80\ € - 120\ € = 22{,}80\ €$

Beispiel 12

Auf Druckwaren werden nur 7% Mehrwertsteuer erhoben.
Wie hoch ist der Mehrwertsteuer-Betrag, der in einer Lieferung Bücher für 240 € enthalten ist?

Lösung:

Bruttopreis: $B = 240\ €$

Nettopreis: $N = \frac{B}{q} = \frac{240}{1{,}07}\ € = 224{,}30\ €$

Mehrwertsteuer : $M = N \cdot p = 224{,}30\ € \cdot 0{,}07 = 15{,}77\ €$

Oder in einer einzigen Rechnung: $M = \frac{B}{q} \cdot p = \frac{240}{1{,}07} \cdot 0{,}07\ € = 15{,}70\ €$

Oder: $M = B - N = 240{,}00\ € - 224{,}30\ € = 15{,}70\ €$

Aufgabe 2:

(Lösung Seite 29)

a) Eine CD kostet 20,88 €. Berechne den Nettopreis zum Mehrwertsteuersatz 19%.

b) Der Nettopreis von einem Paar Schuhen ist 42,50 €. Berechne den Bruttopreis bei 19 % Mehrwertsteuer.

c) Ein Computer-Monitor kostet netto 182 €. Dazu kommen 19 % Mehrwertsteuer und 12 % Rabatt. Berechne den Endpreis.

d) Ein Computer kostet 1000 € netto. Der Händler gibt darauf 15 % Rabatt und berechnet den Endpreis zuzüglich 19 % Mehrwertsteuer.

e) Gehwegplatten kosten 2,50 € das Stück. Herr Klaus benötigt 24 Stück. Auf diesen Nettopreis kommen 19 % Mehrwertsteuer und dann darf er bei Barzahlung 3 % (Skonto) abziehen. Was bezahlt er?

f) Ein Endpreis enthält 19% Mehrwertsteuer und 5% Skonto. Wie hoch war die Mehrwertsteuer, wenn der Endpreis 76 € war)?

Grundaufgaben zur Mehrwertsteuerberechnung

Der Nettopreis ist immer der Grundwert!

1. Grundaufgabe: **Aus dem Nettopreis die Mehrwertsteuer berechnen:**

Die Mehrwertsteuer M beträgt 19% vom Nettopreis N, also rechnet man:

$$\boxed{M = N \cdot 0{,}19}$$

2. Grundaufgabe: **Aus dem Nettopreis den Bruttopreis berechnen:**

Der Bruttopreis B beträgt 119% vom Nettopreis N, also rechnet man:

$$\boxed{B = N \cdot 1{,}19} \quad \text{oder} \quad \boxed{B = N + M}$$

3. Grundaufgabe: **Aus dem Bruttopreis den Nettopreis berechnen:**

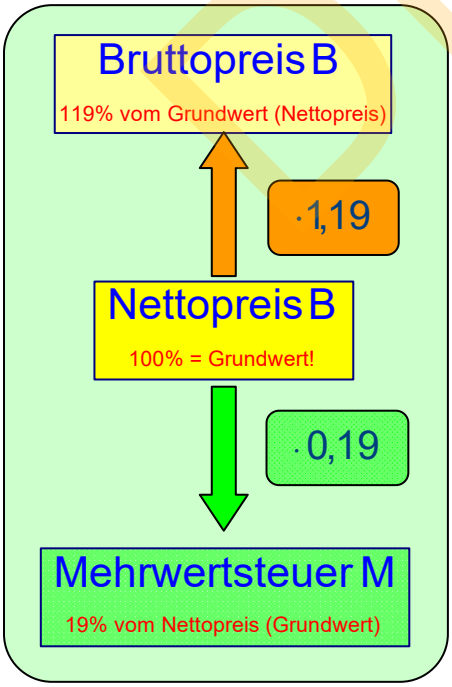
Rechnet man vom Bruttopreis auf den Nettopreis zurück, muss man durch 1,19 dividieren: (Berechnung des Grundwerts!)

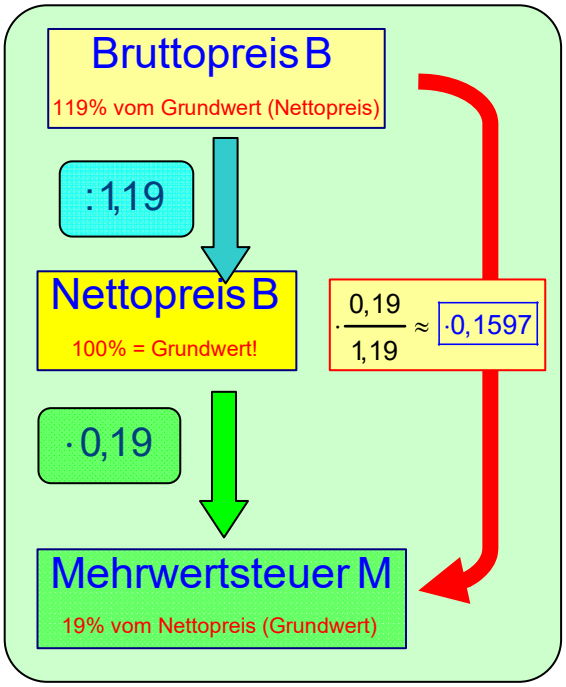
$$\boxed{N = \frac{B}{1{,}19}}$$

4. Grundaufgabe: **Aus dem Bruttopreis die Mehrwertsteuer berechnen:**

Die Mehrwertsteuer beträgt 19% vom Nettopreis, also rechnet man:

$$M = N \cdot 0{,}19 = \boxed{\frac{B}{1{,}19} \cdot 0{,}19} = B \cdot \frac{0{,}19}{1{,}19} \quad \text{oder} \quad M = B - N$$





Ein falsches Werbeversprechen

In einem Werbeprospekt stand:

> Aktion am Sonnabend:
>
> Sie bekommen unsere Fernseher um 19% billiger, also ohne Mehrwertsteuer.

Warum ist dieser Satz Unsinn und falsch?

Beispiel 13

Wenn ein Fahrrad um 19% billiger abgegeben wird, dann beträgt der neue Preis doch nur noch 81% des alten Preises. Betrug dieser 280 €, dann errechnet man den ermäßigten Preis so:

$$\text{Endpreis:} \quad 0{,}81 \cdot 280\ € = 226{,}80\ €\,.$$

Wenn man aber so argumentiert, dass die Mehrwertsteuer (19%) erlassen wird, man also nur den Nettopreis bezahlen muss, dann soll man so rechnen:

$$\text{Endpreis:} \quad \frac{B}{p} = \frac{280\ €}{1{,}19} = 235{,}29\ €\,.$$

Die Erklärung:

Im 1. Fall liegt ein <u>Preisnachlass</u> vor. Dabei wird **der alte Preis als Grundwert** angesehen, und man berechnet 19% vom Grundwert 280 € als Preisnachlass, das sind 53,20 €.
Man kann dies verkürzen, wenn man weiß, dass dann der **Endpreis 81% des alten Preises beträgt.**

Im 2. Fall ist **der alte Preis <u>nicht</u> der Grundwert**! Die Mehrwertsteuer beträgt nämlich nicht 19% von 280 € sondern 19% vom Nettopreis, den wir ja noch gar nicht kennen!

Der Verkaufspreis 280 € (Bruttopreis) beträgt also jetzt nicht 100% sondern 119%.
Das Zurückrechnen auf den Nettopreis, der jetzt zum Endpreis wird geschieht also durch Umkehrung der Multiplikation $B = N \cdot 1{,}19$, also durch Division:

Der Endpreis ist hier also der Grundwert, also $N = \frac{B}{1{,}19} = \frac{280\ €}{1{,}19} = 235{,}29\ €$

MERKE:

Handelt es sich um einen neuen <u>Preisnachlass</u> um den Prozentsatz p, dann berechnet man den ermäßigten Endpreis E aus dem alten Preis A durch

$$E = A \cdot (1 - p)$$

Ist die Preissenkung aber nur eine <u>Zurücknahme einer Preiserhöhung</u> um den Prozentsatz p, dann gehörte der Verkaufspreis bereits zum Prozentsatz 1+p (also über 100%!). Der Endpreis ist jetzt wieder der Grundwert, und daher muss man dividieren:

$$E = \frac{A}{1+p}$$

4 Mehrfache Veränderung von Werten

Beispiel 14 Mehrfache Preiserhöhung

Eine Kamera kostet 248 € netto (also ohne die Mehrwertsteuer). Auf Grund eines Engpasses in der Produktion von Speicherchips verteuert sich diese Kamera um 8%.

Berechne den Endpreis inklusive der Mehrwertsteuer (19%).

1. Lösung

Alter Nettopreis:	248,00 €
Preiserhöhung 8%:	$248\ € \cdot 0{,}08 = 19{,}84\ €$
Erhöhter Nettopreis	267,84 €
Mehrwertsteuer 19%:	$267{,}84\ € \cdot 0{,}19 \approx 50{,}89\ €$
Bruttopreis (Verkaufspreis)	318,73 €

2. Lösung

Alter Nettopreis: 248 €

Erhöhter Nettopreis: $248\ € \cdot 1{,}08 = 267{,}84\ €$

Bruttopreis $267{,}84\ € \cdot 1{,}19 = 318{,}73\ €$

Super-Lösung:

Alter Nettopreis: 248 €

Bruttopreis $248\ € \cdot \boxed{1{,}08 \cdot 1{,}19} = 318{,}73\ €$

Beispiel 15 Mehrfache Preiserhöhung

Ein Auto schlägt innerhalb eines Jahres zweimal auf. Der ursprüngliche Preis war 14.500 €. Die erste Preiserhöhung geschieht um 4%, dann folgt eine Preiserhöhung um 6%.

Wie viel kostet es am Ende?

Hat Franz Recht, wenn er meint, das Auto sei nun um 10% teurer geworden?

Lösung

Alter Preis: 14500 €.

Nach der ersten Preiserhöhung: $14500\ € \cdot 1{,}04 = 15080\ €$

Nach der zweiten Preiserhöhung: $15080\ € \cdot 1{,}06 = 15984{,}8\ €$

Super-Lösung $\text{Endpreis} = 14500\ € \cdot \underbrace{1{,}04 \cdot 1{,}06}_{1{,}1024} = 15984{,}8\ €$

Wie man erkennt, erhält man denselben Endpreis, wenn man einmalig um 10,24 % aufschlägt, denn $1{,}04 \cdot 1{,}06 = 1{,}1024 = 1 + 10{,}24\%$ **.**

Wichtig:

Folgen mehrere Preisänderungen aufeinander, multipliziert man die Wachstumsfaktoren miteinander.

Ihr Produkt ergibt dann den totalen Prozentsatz der Änderung!

Beispiel 16: Preiserhöhung zuerst um 5 %, dann nochmals um 5 %:

$$N = G \cdot \underbrace{1{,}05 \cdot 1{,}05}_{1{,}1025} = G \cdot 1{,}1025$$

Der Faktor 1,1025 entspricht einer Gesamterhöhung um 10,25%.

Beispiel 17: Preiserhöhung um 10% und dann um 3 %:

$$N = G \cdot \underbrace{1{,}1 \cdot 1{,}03}_{1{,}133} = G \cdot 1{,}133$$

Der Faktor 1,133 entspricht einer Gesamterhöhung um 13,3%.

Beispiel 18: Preiserhöhung um 50% und dann um 20 %:

$$N = G \cdot \underbrace{1{,}5 \cdot 1{,}2}_{1{,}8} = G \cdot 1{,}8$$

Der Faktor 1,8 entspricht einer Gesamterhöhung um 80%.

Merke also:

Bei mehreren Preiserhöhungen nacheinander, darf man die Prozentsätze <u>nicht addieren</u>!

Der Grund: Jeder bezieht sich auf einen anderen Grundwert.

Vielmehr muss man die Änderungsfaktoren (1+p) miteinander <u>multiplizieren</u>!

Aufgabe 3

(Lösung Seite 29)

Wie viel sind

a) 80% von 30 % von 420 €?

b) 30% von 80% von 420 €?

c) 50% von 50% von 200 m?

d) 120% von 80% von 50 €?

Wie viel Prozent wurden in jeder Teilaufgabe insgesamt berechnet?

Beispiel 19: Preissenkung und Erhöhung

Der Nettopreis einer Hose ist 64 €. Der Händler muss noch 19% Mehrwertsteuer dazurechnen. Dann gewährt er 20 % Schlussverkaufsrabatt.

Welchen Verkaufspreis ergibt das?

Erhält man dasselbe Ergebnis, wenn man zuerst den Rabatt berechnet und dann erst die Mehrwertsteuer dazu fügt?

Lösung

1. Methode: Man berechnet die Mehrwertsteuer und <u>addiert</u> sie zum Nettopreis. Dann berechnet man den Rabatt und <u>subtrahiert</u> diesen vom Bruttopreis.

Nettopreis:	64,00 €
Mehrwertsteuer:	19% von 64 € $= 0{,}19 \cdot 64$ € $= 12{,}16$ €
Bruttopreis:	76,16 €
Rabatt:	20% von 76,16 € $= 0{,}2 \cdot 76{,}16$ € $= 15{,}232$ € $\approx 15{,}23$ €
Verkaufspreis:	60,93 €

2. Methode: Kurze Berechnung des Bruttopreises: $64\ € \cdot 1{,}19$

Dann fügt man den Faktor 0,8 für den Rabatt dazu:

Verkaufspreis: $64\ € \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}8 = 60{,}93$ €

Es ist egal, ob man zuerst den Rabatt abzieht und dann die Mehrwertsteuer dazu addiert oder umgekehrt.

$$\text{VK} = \underbrace{\text{Netto} \cdot 1{,}19}_{\text{Brutto}} \cdot 0{,}8 = \ldots$$

+19% MWSt. −20% Rabatt

$$\text{VK} = \text{Netto} \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}19 = \ldots$$

−20% Rabatt +19% MWSt.

Beispiel 20: Florians Fahrrad wird finanziert

Florian hat auf ein Fahrrad gespart. Er sucht sich ein Sportrad für 480 € aus und handelt tatsächlich vom Händler noch 20 % herab, so dass er nur noch 80% des angegebenen Preises bezahlen muss. Davon muss er aber nur 60% bezahlen, denn die anderen 40% übernimmt sein Vater.

Wie viel muss Florian selbst bezahlen und wie viel Prozent der ursprünglichen Summe sind das?

Lösung: Kurzmethode

$$480\ € \xrightarrow[\cdot 0{,}8]{-\text{Rabatt}} 480\ € \cdot 0{,}8 \xrightarrow[\cdot 0{,}6]{\text{Eigenanteil 60\%}} 480\ € \cdot \underbrace{0{,}8 \cdot 0{,}6}_{\cdot 0{,}48} = 230{,}40\ €$$

Ins Heft wird man diese Rechnung schreiben:

Florian muss selbst bezahlen: $E = 480\ € \cdot \underbrace{0{,}8 \cdot 0{,}6}_{\cdot 0{,}48} = 230{,}40\ €$

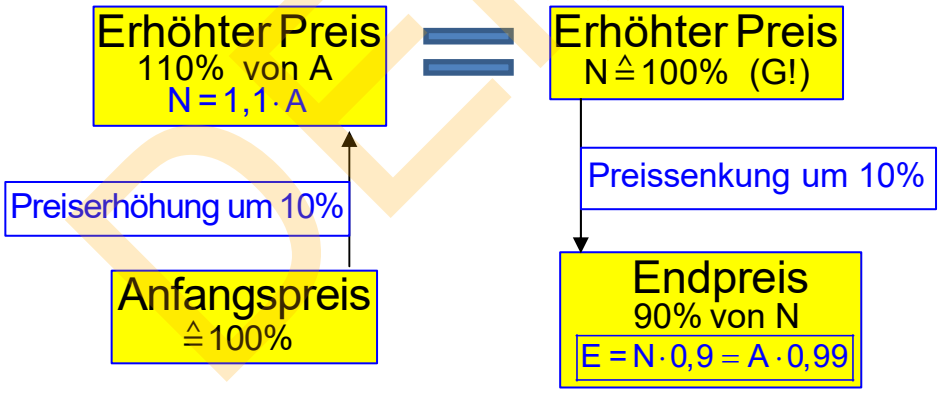
Das sind 48% des ursprünglichen Preises.

Beispiel 21 Preiserhöhung um 10% und dann Senkung um 10%

	Allgemein		Beispiel
(a)	Gegeben sei der alte Preis:	A	$A = 200$ €
	Preiserhöhung um den Prozentsatz p:		$p = 10\% = 0{,}1$
	Zunahmefaktor:	$q_Z = 1 + p$	$q_Z = 1{,}1$
	Neuer Preis:	$N = A \cdot (1+p) = A \cdot q_Z$	$N = 200 \cdot 1{,}1 = 220$
	Preissenkung um den Prozentsatz p:		
	Abnahmefaktor:	$q_A = 1 - p$	$q_A = 0{,}9$
	Endpreis:	$E = N \cdot (1-p) = N \cdot q_A$	$E = 220\text{ €} \cdot 0{,}9 = 198\text{ €}$
	Zusammensetzen der Formeln:	$E = A \cdot (1+p) \cdot (1-p)$	
	Man kann noch umformen in:	$E = A \cdot (1-p^2)$	$E = 200 \cdot \underbrace{(1-0{,}01)}_{0{,}99} = 198$

Man erkennt, dass der Endpreis und der Anfangspreis verschieden sind. Den Grund kann man so erklären:

Die Preissenkung um 10% bewirken mehr Euro also die Preiserhöhung um 10%, weil sich die Preissenkung auf den zuvor erhöhten Preis bezieht. Daher sind diese 10% mehr als die anfängliche Preissteigerung um 10%, ausgehend vom niedrigeren Anfangspreis.,



Erhöhung und Senkung gleichen sich also **nicht** aus:

Ergebnis: Nach Erhöhung um 10% und anschließender Senkung um 10% erhält man einen Endpreis, der um 1 % unter dem Anfangspreis liegt.

Aufgabe 4: (Die Lösung folgt sofort)

(a) Rechne den umgekehrten Fall durch: Zuerst 10% Preissenkung, dann 10% Erhöhung. Wie wirkt sich dies aus?

(b) Ein Preis A wird um den Prozentsatz p_1 erhöht.
Um wieviel Prozent p_2 muss man ihn anschließend wieder senken, wenn der Endpreis E gleich groß wie der Anfangspreis sein soll?
Gib zwei Beispiele an.

Lösung Aufgabe 4

a) Preissenkung um 10% und dann Erhöhung um 10%

Allgemein		**Beispiel**
Gegeben sei der alte Preis:	A	$A = 200\ €$
Preissenkung um den Prozentsatz p:		$p = 10\% = 0{,}1$
Abnahmefaktor:	$q_A = 1 - p$	$q_A = 0{,}9$
Neuer Preis:	$N = A \cdot (1-p) == A \cdot q_A$	$N = 200 \cdot 0{,}9 = 180$
Preiserhöhung um den Prozentsatz p:		$p = 10\% = 0{,}1$
Zunahmefaktor:	$q_Z = 1 + p$	$q_Z = 1{,}1$
Endpreis:	$E = N \cdot (1+p) = N \cdot q_Z$	$E = 180\ € \cdot 1{,}1 = 198\ €$
Zusammensetzen der Formeln:	$E = A \cdot (1-p) \cdot (1+p)$	
Man kann noch umformen in:	$E = A \cdot \left(1 - p^2\right)$	$E = 200 \cdot \underbrace{(1-0{,}01)}_{0{,}99} = 198$

Man erkennt, dass der Endpreis und der Anfangspreis verschieden sind.

Aber interessanterweise erhält man dasselbe Ergebnis wie beim Vorgang „Zuerst Erhöhen, dann Senken“.

(b) Eine Zunahme um den Prozentsatz p_1 und eine nachfolgende Abnahme um den Prozentsatz p_2 soll keine Änderung bewirken, also **wieder zum Ausgangspreis führen.**

Dann muss gelten:

Endpreis $E = A \cdot (1+p_1) \cdot (1-p_2) = A$

Also muss gelten: $(1+p_1) \cdot (1-p_2) = 1$

oder kürzer: $q_1 \cdot q_2 = 1$ bzw. $q_2 = \frac{1}{q_1}$.

Dasselbe Ergebnis erhält man, wenn zuerst die Preissenkung erfolgt.

Beispiele 22

a) Eine Erhöhung um 10%, also mit dem Faktor $q_1 = 1{,}1$ wird ausgeglichen durch eine Senkung mit $q_2 = \frac{1}{1{,}1} \approx 0{,}909$.

Wegen $q_2 = 1 - p_2 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 1 - q_2 = 1 - 0{,}909 = 0{,}091 = 9{,}1\%$

b) Eine Preissenkung um 8% soll durch eine Erhöhung wieder rückgängig gemacht werden.

$q_1 = 1 - 0{,}08 = 0{,}92$

Der Wachstumsfaktor der folgenden Erhöhung ist dann

$q_2 = \frac{1}{0{,}92} \approx 1{,}087 \quad \Rightarrow \quad p_2 = 0{,}087 = 8{,}7\%$

Beispiel 23 Preissenkung und Erhöhung

Ein DVD-Player kostet netto 84 €. Die Mehrwertsteuer beträgt bald 19 %.
Der Händler gewährt 12 % Rabatt.

Berechne den Verkaufspreis - einmal ganz ausführlich, einmal mit der kürzesten Methode.

Lösung Kurzmethode:

Verkaufspreis = $84\ € \cdot 1{,}19 \cdot (1 - 0{,}12) = 84\ € \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}88 = 87{,}9648\ € \approx 87{,}96\ €$

Beispiel 24 Preissenkung und Erhöhung

Ist es günstiger, wenn der Preis einer Kamera
a) zuerst um 20% gesenkt und dann wieder um 20% erhöht wird, oder
b) zuerst um 20% erhöht und dann wieder um 20% gesenkt wird?
c) Oder bewirken beide keine Änderung?

Du kannst die Rechnung mit einem beliebigen alten Preis A machen oder für A irgendeinen Preis, sagen wir 500 €, verwenden.

Lösung

a) Senkung um 20% bedeutet „mal 0,8“, Erhöhung um 20% bedeutet „mal 1,2“:
$$N = A \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 = A \cdot 0{,}96\ .$$
Das bedeutet, dass der Endpreis insgesamt um 4 % niedriger liegt als zuvor.

Verwendet man A = 500 €, kommt man auf den Endpreis $A = 480\ €$.

b) Wenn man zuerst erhöht, verwendet man zuerst den Faktor 1,2, und später für die Preissenkung 0,8. Die Reihenfolge spielt keine Rolle.

Auch hier ist der Endpreis $N = A \cdot 0{,}8 \cdot 1{,}2 = A \cdot 0{,}96$ (bzw. 480 €),

c) Man sieht also, dass sich Preissenkung um 20% und Preiserhöhung um 20% nicht ausgleichen sondern insgesamt eine Preissenkung um 4% bedeuten.

Beispiel 25 Preiserhöhung und Senkung

Ein Laptop wird um 10% im Preis erhöht. Um wie viel % muss sein Preis dann später wieder gesenkt werden, wenn der Endpreis derselbe sein soll wie der ursprüngliche Preis?

Lösung (Siehe dazu auch Seite 23!)

Der Preis nach der Erhöhung um 10% ist $N = A \cdot 1{,}1$.
Nach der nächsten Senkung mit dem Faktor x soll gelten: $A = A \cdot 1{,}1 \cdot x$.

Das Produkt $1{,}1 \cdot x$ muss also den Wert 1 haben, also ist $x = \frac{1}{1{,}1} \approx 0{,}909$.

Dies entspricht einer Senkung um 1 - 0,909 = 0,091 also um 9,1%.

Beispiel 26: Was Aktionäre wissen sollten

Die Aktie von WBM kostete gestern noch 84,70 €. Heute ist der Kurs 4,2% gefallen, so dass die Aktie nur noch 81,14 € wert ist.

Herr Gierig besitzt 2000 Aktien davon und hat somit viel Geld verloren. Er sagt zu seiner erregten Frau: Bald ist der Kurs wieder um 4,2% gestiegen, und dann haben wir den Schaden wieder gut gemacht.

Wir wissen nun, dass diese Aussage falsch ist.

Die Senkung des Aktienkurses um 4,2% bezieht sich auf den Preis 84,70 €.

Eine Erhöhung des Preises um 4,2% bezieht sich dagegen auf den gefallenen Kurs, also auf 81,14 €.

Eine Steigerung um 4,2 % geht vom Grundwert 81,14 € aus und führt daher zu 84,55 €.

Das sind 15 Cent weniger als zuvor. Bezogen auf seine 2000 Aktien bleibt also immer noch ein Verlust von $2000 \cdot 0{,}15\ € = 300\ €$!

Um wie viel Prozent muss der gefallene Kurs wieder steigen, damit der alte Kurs wieder erreicht ist?

Ausführliche Lösung: Es sei A der alte Kurs, q_1 der Abnahmefaktor $q_1 = 1 - 0{,}042 \approx 0{,}958$ und q_2 sei der noch unbekannte Zunahmefaktor für die Kurssteigerung.

Für den Endkurs (also nach Fallen und wieder Steigen) gilt dann: $E = A \cdot 0{,}958 \cdot q_2$

Dieser Endkurs soll wieder der alte Kurs A sein: $A \cdot 0{,}958 \cdot q_2 = A$

Dividiert man durch A, erhält man

$$0{,}958 \cdot q_2 = 1 \quad \Rightarrow \quad q_2 = \frac{1}{0{,}958} \approx 1{,}0438$$

Dies bedeutet eine Zunahme um etwa 4,38%.

Ergebnis: Ein Kursverlust um p_1 (Prozent), also um den Abnahmefaktor $q_1 = 1 - p_1$ kann durch eine Kurssteigerung um p_2 (Prozent) ausgeglichen werden.

Dabei gilt: $q_2 = \frac{1}{q_1}$.

Und wegen $q_2 = 1 + p_2$ folgt daraus $p_2 = q_2 - 1$

Bemerkung:

Kluge Algebraiker können durch Zusammensetzen der Formeln daraus dieses ableiten:

$$p_2 = q_2 - 1 \quad \text{und} \quad q_2 = \frac{1}{q_1} \quad \text{mit} \quad q_1 = 1 - p_1 :$$

$$p_2 = \frac{1}{1-p_1} - 1$$ Oder auf einen Nenner gebracht:

$$p_2 = \frac{1}{1-p_1} - \frac{1-p_1}{1-p_1} = \frac{1-(1-p_1)}{1-p_1} = \frac{p_1}{1-p_1}$$

Für unser Beispiel: $p_1 = 0{,}042$ ergibt $p_2 = \frac{0{,}042}{1-0{,}042} \approx 0{,}0438$

Wer als Aktionär also diese Formel kennt, kann sich schneller orientieren.

Beispiel 27: Bakterienwachstum

Der Bakterienstamm P13 vermehrt sich so, dass sein Bestand pro Stunde um 40% wächst.

Ein Labor beginnt mit einer Ausgangsmenge von 50 Bakterien und lässt diese sich vermehren.

Berechne die Bakterienzahlen nach 1, 2, 3 und 4 Stunden.

Lösung

Die Ausgangsmenge ist der Start-Grundwert: $G_O = 50$.

Bakterienzahl nach 1 Stunde:

Eine Erhöhung um 40% ergibt einen Prozentsatz von 140%. Die Berechnung des Prozentwerts geschieht daher durch Multiplikation mit dem Wachstumsfaktor q =1,4

$$G_1 = G_0 \cdot 1{,}4 = 50 \cdot 1{,}4 = 70$$

Bakterienzahl nach 2 Stunden:

Jetzt geht man von der neuen Grundmenge 70 aus und lässt diese um 40% wachsen, also wieder auf das 1,4-fache.

$$G_2 = G_1 \cdot 1{,}4 = 70 \cdot 1{,}4 = 98$$

Bakterienzahl nach 3 Stunden:

$$G_3 = G_2 \cdot 1{,}4 = 98 \cdot 1{,}4 = 137{,}2 \approx 137$$

Da dies nur eine Modellrechnung ist, kommt man hier auf 0,2 Bakterien, was natürlich nicht sein kann, daher rundet man sinnvoll.

Bakterienzahl nach 4 Stunden:

$$G_4 = G_3 \cdot 1{,}4 = 137 \cdot 1{,}4 = 191{,}8 \approx 192$$

Beobachtung:

Für jede Stunde wird der Bestand mit dem „Wachstumsfaktor“ 1,4 multipliziert.

Die Berechnung der Bakterienzahl nach 4 Stunden kann man dann aber auch auf einmal durchführen und den Bestand nach 4 Stunden direkt aus dem Anfangsbestand berechnen:

$$G_4 = \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{G_0 \cdot 1{,}4}_{G_1} \cdot 1{,}4}_{G_2} \cdot 1{,}4}_{G_3} \cdot 1{,}4}_{G_4}$$

Dafür kann man die abkürzende Potenzschreibweise verwenden:

$$G_4 = G_0 \cdot 1{,}4^4 = 50 \cdot 1{,}4^4 = 192{,}08 \approx 192$$

Der Bestand nach 24 Stunden wird dann kurz so berechnet:

$$G_{24} = G_0 \cdot 1{,}4^{24} = 50 \cdot 1{,}4^{24} = 160.710$$

WARNUNG: Schlimme Fehler bei der Prozentrechnung

1. Warnung

Fritz Schlaumeier will das **Beispiel 4** von oben auf seine Weise lösen.

Der Nettopreis einer Hose ist 64 €. Der Händler muss noch 19 % Mehrwertsteuer dazurechnen. Dann gewährt er 20 % Schlussverkaufsrabatt. Welchen Verkaufspreis ergibt das?

Fritz denkt so: 19 % Aufschlag und dann 20 % Abschlag, das gibt doch insgesamt 1 % Abschlag!

Und daher rechnet er so: 1% von 64 € $= 0{,}01 \cdot 64$ € $= 0{,}64$ €

Neuer Preis: 64 € $- 0{,}64$ € $= 63{,}36$ €.

Warum ist die Schlaumeierlösung falsch?

Lösung:

$$\underbrace{\boxed{19\%}}_{\text{Prozentsatz}} \text{ von } \underbrace{\boxed{64\,€}}_{\text{Grundwert}} = 0{,}19 \cdot 64\,€ = \underbrace{\boxed{12{,}16\,€}}_{\text{Prozentwert}}$$

Daraus entsteht der Bruttopreis in Höhe von 64 € + 12,16 € = 76,16 €.

Schneller geht es mit dem Mehrwertsteuerfaktor q = 1,19: 64 € · 1,19 = 76,16 €

Der Preisnachlass in Höhe von 20 % bezieht sich nicht mehr auf die 64 € (davon geht Fritzchens falsche Lösung aus), sondern sie hat den <u>Bruttopreis als neuen Grundwert</u>:

$$\underbrace{\boxed{20\%}}_{\text{Prozentsatz}} \text{ von } \underbrace{\boxed{76{,}16\,€}}_{\text{Grundwert}} = 0{,}20 \cdot 76{,}16\,€ = \underbrace{\boxed{15{,}23\,€}}_{\text{Prozentwert}}$$

Der Endpreis ist somit E = 75,16 € − 15,23 € = 60,93 €

oder besser mit den Rabattfaktor q = 1 – 0,20 = 0,8: E = 76,16 € · 0,8 = 60,93 €

Man darf also die Prozentsätze nicht zusammenrechnen, wenn sie sich auf verschiedene Grundwerte beziehen.

Die Kurzlösung verwendet beide Faktoren: q_1 = 1,19 für die Mehrwertsteuer und q_2 = 0,8 für den Rabatt:

$$E = A \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}8 = 64\,€ \cdot 1{,}19 \cdot 0{,}8 = 60{,}93\,€$$

2. Warnung

Ein großer Verkaufsladen wirbt damit: „Weg mit der Mehrwertsteuer“. Bei uns erhalten Sie 19 % Nachlass auf alles.

Ein Laptop kostet Netto 689,00 € (Grundwert).
Die Mehrwertsteuer beträgt 19 %, daher kostet der Laptop 689 € · 1,19 = 819,91 €

Der Händler gibt nun den Laptop für den Nettopreis ab, also für 689 €.

Seine Aussage lautete: Bei uns erhalten Sie 19 % Nachlass auf alles. Das ist jedoch **falsch**.

Wenn er die Mehrwertsteuer weglässt, hat er einen Rabatt in Höhe von 130,91 € gewährt.

Das sind in Wirklichkeit $p = \frac{W}{G} = \frac{130{,}191}{819{,}91} = 0{,}1597 \approx 16\%$

Den Rabatt bezieht man auf den Bruttowert, also auf 819,91 €, die Mehrwertsteuer auf 689 €.

Weitere vermischte Aufgaben

Aufgabe 5

(Lösungen ab Seite 30)

Bei einer Wahl gehen in Kreuzdorf 1250 Personen zur Wahl. Im Amtsblatt werden später veröffentlicht: 33 % haben die SPD gewählt, 27% die CDU, 18% die PDS, 8,2% die Grünen, 9,5% die FDP. Berechne die Anzahl der Personen, welche diese Parteien gewählt haben. Wie viel Prozent bzw. Personen haben andere Parteien gewählt oder ungültige Wahlzettel abgegeben?

Aufgabe 6

Auf der Verpackung eines Fertiggerichts steht: Inhalt: 12,5% Fett, 20% Wasser, 15% Mehl, Gesamtgewicht 750 g. Berechne diese Anteile in g.

Aufgabe 7

Herr Mies erkennt, dass man ihm von seinem Lohn in Höhe von 1270 € genau 266,70 € Steuern abgezogen hat. Wie hoch war der Steuersatz?

Aufgabe 8

Herr Fahrschnell kauft sich ein neues Auto. Der Neupreis beträgt 28420 €. Er muss nur 25.000 € bezahlen. Wie viel Prozent hat der Händler nachgelassen?

Aufgabe 9

Ein Händler verkauft eine CD für 69 €. Darin sind enthalten: 19% Mehrwertsteuer, 3,50 € Porto und Verpackung. Wie viel bleibt ihm dann als Gewinn, wenn das Finanzamt 35% Einkommensteuer einbehält? Wie groß war den Nettopreis und wie groß war der Anteil der Mehrwertsteuer?

Aufgabe 10

Das Porto für einen Versand der CD innerhalb Deutschland kostet 90 Cent, ins Ausland kostet sie 3,45 €. Der Briefmarkenkauf ist ohne Mehrwertsteuer. Verlangt der Händler jedoch Portoersatz von Käufer, muss er dafür 19% Mehrwertsteuer ans Finanzamt abführen. Und natürlich auch die Einkommensteuer, die wir hier einmal mit 35% ansetzen.

Wie viel Portoersatz E muss der Händler vom Kunden verlangen, damit er am Ende sein Porto P erstattet bekommen hat?

Aufgabe 11

a) Berechne die fehlenden Zahlen, wenn überall derselbe Grundwert vorausgesetzt wird.

Prozentsatz	52%	35%	12%	68%		
Prozentwert	135,2				39	299

b) Überprüfe, ob die folgende Tabelle richtig ausgefüllt ist.
Was könnte man zu den gefundenen Abweichungen sagen?

Prozentsatz	20%	35%	12%	86%	56%	240%
Prozentwert	91	159,25	61,44	391,13	286,72	1228,8

5 Nettogewicht – Bruttogewicht – Tara

Das Gewicht (besser gesagt: die Masse) des Inhalts heißt **Nettogewicht**.
Das Gewicht von Verpackung und Inhalt nennt man **Bruttogewicht**.
Das Gewicht der Verpackung eines Gegenstandes nennt man **die Tara**.

Beispiel 28

Eine Packung Kokosflocken enthält 100 g Kokosmakronen. Die Gesamtpackung wiegt 130 g. Wie viel Prozent des Inhalts beträgt die Tara, und wie viel Prozent des Gesamtgewichts?

Lösung

Die Tara beträgt 30 g.

Das sind – bezogen auf das Nettogewicht - $p_N = \frac{30}{100} = 30\%$.

Und es sind – bezogen auf das Bruttogewicht - $p_B = \frac{30}{130} \approx 0{,}231 = 23{,}1\%$.

Beispiel 29

Wenn man eine Verordnung aufstellt, in der steht, dass die Tara bei Kosmetika nicht mehr als 150% des Nettogewichts betragen darf, wie viel darf dann eine Cremedose wiegen, wenn sie 30 g Hautcreme enthält? Und wie groß ist dann das Bruttogewicht?

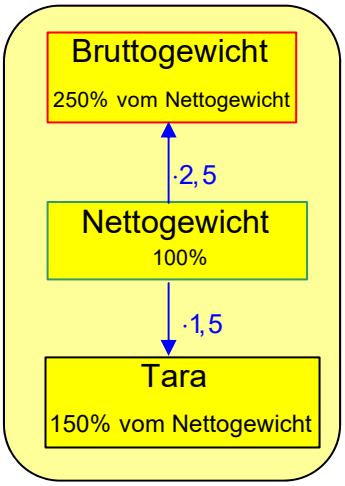
Lösung

Nettogewicht: $N = 30\text{ g}$

Tara: $T = 1{,}5 \cdot 30\text{ g} = 45\text{ g}$

Bruttogewicht: $B = 2{,}5 \cdot 30\text{ g} = 75\text{ g}$

Oder so: $B = N + T = 30\text{ g} + 45\text{ g} = 75\text{ g}$



Beispiel 30

Eine Kiste mit Mandarinen wiegt 5,80 kg.
Man erfährt, dass hierbei das Tara 28% ausmacht.
Berechne das Nettogewicht und dann die Tara.

Lösung

Wenn die Tara 28% (von Nettogewicht) beträgt, dann beträgt das Bruttogewicht 128% vom Nettogewicht.

Dieses rechnen wir also so aus: $N = \frac{B}{1{,}28} = \frac{5{,}80\text{ kg}}{1{,}28} \approx 4{,}531\text{ kg}$.

Und für die Tara gilt dann: $T = 0{,}28 \cdot N \approx 4{,}531\text{ kg} \cdot 0{,}28 \approx 1{,}269\text{ kg}$

Oder auf einmal aus Brutto berechnet: $T = \frac{B}{1{,}28} \cdot 0{,}28 \approx 1{,}269\text{ kg}$

5. Graphische Umsetzung von Tabellen mit Prozenten

Treten bei Untersuchungen von Sachverhalten verschiedene Ergebnisse auf, erstellt man dazu oft eine Grafik, die schnell einen „Eindruck“ von der Häufigkeit der Ergebnisse liefern kann.

Beispiel 31: Absolute, relative und prozentuale Häufigkeiten

Bei einer Wahl zum Bürgermeister wurden folgende Stimmen ausgezählt:

Herr Maier erhielt 5280 Stimmen, Herr Römer 12317, Frau Schulze 4210, Herr Lehmann 872. Dann gab es noch 1260 Stimmen für weitere Bewerber.

Erfasse diese Werte in einer Tabelle. Berechne dazu die relative und die prozentuale Häufigkeit.

Zeichne ein Kreisdiagramm dazu.

Lösung:

Kandidat	Maier	Römer	Schulze	Lehmann	Sonstige	Summe
Absolute Häufigkeit	5280	12317	4210	872	1260	23939
Relative Häufigkeit	$\frac{5280}{23939} \approx 0{,}221$	0,515	0,176	0,036	0,053	1,001
Prozentuale Häufigkeit	22,1 %	51,5 %	17,6 %	3,6%	5,3%	100,1%
Winkelgrad	$0{,}221 \cdot 360^\circ \approx 80^\circ$	185°	63°	13°	19°	360°

Die Stimmen, die jeder Kandidat erhalten hat, nennt man die **absolute Häufigkeit** n_1, n_2 usw.

Insgesamt sind also n = 23939 gültige Stimmen abgegeben worden.

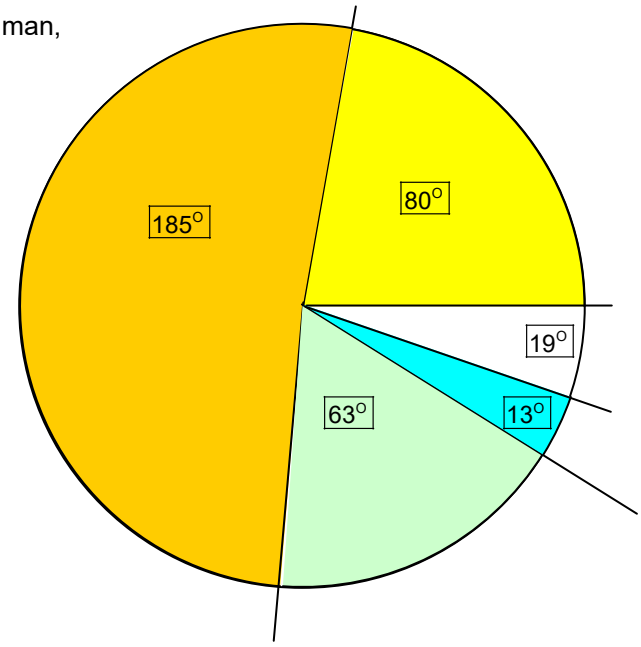
Die Bruchteile davon nennt man die **relativen Häufigkeiten**.

Für Herrn Maier waren das $h_1 = \frac{n_1}{n} = \frac{5280}{23939} \approx 0{,}221$.

Das lässt sich durch Kommaverschiebung sofort als **prozentuale Häufigkeit** $p_1 = 22{,}1\%$ angeben.

Zur Erstellung des **Kreisdiagramms**, berechnet man, wie viel Grad diese Prozentsätze bedeuten:

22,1% von 360° sind $0{,}221 \cdot 360^\circ \approx 80^\circ$.



Beispiel 32

In der Klassenstufe 10 eines Gymnasiums wird für eine Schulstatistik abgefragt, wie viele Schüler Fremdsprachenkurse besuchen.

Angeboten werden die Kurse Englisch, Französisch, Latein und Spanisch.
In der Klassenstufe 10 befinden sich in 4 Klassen insgesamt 120 Schüler.

Die Statistik wurde in folgender Tabelle zusammengefasst:

Sprache	E	F	L	S
Häufigkeit	120	78	42	36

Zunächst erkennen wir, dass Englisch Pflichtfach ist, denn alle Schüler, also 100% besuchen diese Kurse. Als nächstes erkennen wir, dass die Schüler offenbar als zweite Fremdsprache zwischen Latein und Französisch wählen müssen, denn die Zahl der Schüler, die Französisch oder Latein lernen ist zusammen genau wieder 120. Dann haben wir (vermutlich ab Klasse 9) die dritte Fremdsprache Spanisch, die von 36 Kindern gewählt worden ist.

Aber Vorsicht, dies kann täuschen, denn Tamara kam von einer anderen Schule, sie hatte Spanisch als 2. Fremdsprache und hat in Klasse 9 dann mit Französisch als 3. Fremdsprache begonnen.

Doch darum geht es gar nicht. Wir wollen ausrechnen, wie viel Prozent der Schüler sich für eine bestimmte Fremdsprache entschieden haben. Das ist einfach:

Englisch: $p_1 = \frac{120}{120} = 1 = 100\%$

Französisch: $p_2 = \frac{78}{120} = 0{,}65 = 65\%$

Latein: $p_3 = \frac{42}{120} = 0{,}35 = 35\%$

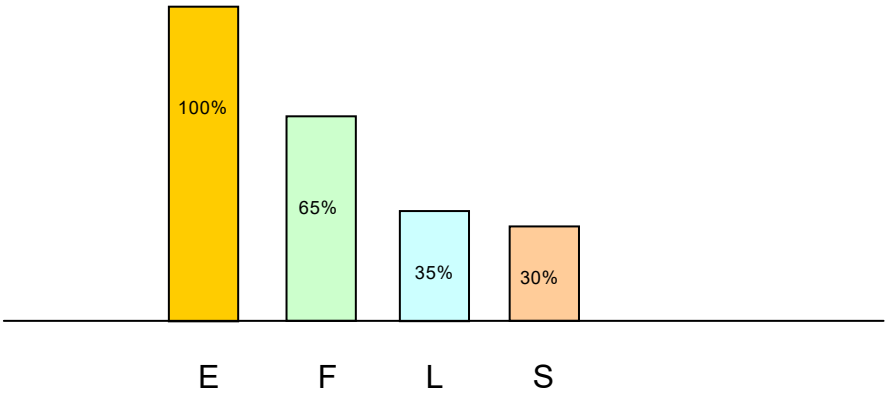
Spanisch: $p_4 = \frac{36}{120} = 0{,}3 = 30\%$.

In der Statistik nennt man diese Brüche bzw. ihre Dezimalwerte die **relativen Häufigkeiten**. Sie entstehen, indem man die **(absoluten) Häufigkeiten** der obigen Tabelle durch die Gesamtzahl dividiert. Nach der Umrechnung in Prozent nennt man die relativen Häufigkeiten auch **prozentuale Häufigkeiten**.

Schreiben wir alle diese Zahlen in eine gemeinsame Tabelle, folgt

Sprache	E	F	L	S
Absolute Häufigkeit	120	78	42	36
Relative Häufigkeit	$\frac{120}{120} = 1$	$\frac{78}{120} = 0{,}65$	$\frac{42}{120} = 0{,}35$	$\frac{36}{120} = 0{,}3$
Prozentuale Häufigkeit	100%	65%	35%	30%

Zeitungen oder Fernsehberichte stellen die prozentualen Häufigkeiten gerne als Diagramme dar, etwa als Balkendiagramm:



Wie erstellt man so ein Balkendiagramm?

Dies geschieht in zwei Schritten:

1. Zuerst legt man fest, welche Höhe 100% entsprechen sollen. Ich habe h_1 = 5 cm gewählt. Die Breite macht man überall gleich, z. B. 1 cm.
2. Dann berechnet man mit Hilfe der Prozentzahlen die Prozentwerte der Höhen:

   zu 65% gehört $h_2 = 0,65 \cdot 5\text{ cm} = 3,25\text{ cm}$,

   zu 35% gehört $h_3 = 0,35 \cdot 5\text{ cm} = 1,75\text{ cm}1$ und

   zu 30% gehört $h_3 = 0,3 \cdot 5\text{ cm} = 1,5\text{ cm}$.

Hinweis: Da bei dieser Situation ein Schüler 2 oder 3 Fremdsprachenkurse besucht, ist die Summe der Schülerzahlen in den Kursen nicht wieder 120 sondern deutlich höher. Dies ändert sich in folgender Umfrage in der gleichen Klassenstufe:

Aufgabe 12

In der Klassenstufe 10 eines Gymnasiums wird für eine Schulstatistik abgefragt, wie viele Schüler einer bestimmten Religionsgemeinschaft angehören. Abgefragt werden folgende „Ausprägungen“ des Merkmals „Religion“: Evangelisch, römisch-katholisch, muslimisch, andere, keine.

Hier die Statistik dazu:

Religion	Ev	Rk	Mos	Sonst	keine	Summe
Absolute Häufigkeit	45	36	12	9	18	
Relative Häufigkeit						
Prozentuale Häufigkeit						
Balkenhöhe						

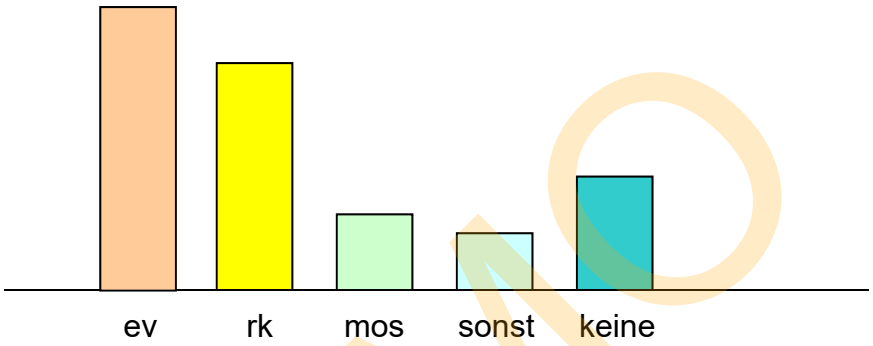
Fülle die Tabelle aus.

Zeichne dann ein Balkendiagramm (5 Säulen) dazu.
Wähle für 100% 10 cm Balkenhöhe.

Die Lösung steht auf der nächsten Seite.

Lösung Aufgabe 12

Religion	Ev	Rk	Mos	Sonst	keine	Summe
Absolute Häufigkeit	45	36	12	9	18	120
Relative Häufigkeit	$\frac{45}{120} = 0{,}375$	$\frac{36}{120} = 0{,}3$	$\frac{12}{120} = 0{,}1$	$\frac{9}{120} = 0{,}075$	$\frac{18}{120} = 0{,}15$	1
Prozentuale Häufigkeit	37,5%	30%	10%	7,5%	15%	100%
Balkenhöhe	3,75 cm	3 cm	1 cm	0,75 cm	1,5 cm	10 cm



Merke:

Da hier jeder Schüler genau einmal erfasst wird, ist die Summe aller „Merkmalsausprägungen“ 100% bzw. 1, wenn man die relativen Häufigkeiten addiert.

In diesem Fall kann man an Stelle eines Balkendiagramms auch **ein Kreisdiagramm erstellen**.

Dazu verteilt man die 100% auf die 360° eines Vollkreises und gibt dann anderen Prozentwerten anteilig die entsprechenden Winkel.

Beispiel: 25% entsprechen dann 90°

58% entsprechen dann $0{,}58 \cdot 360^{\circ} = 208{,}8^{\circ}$

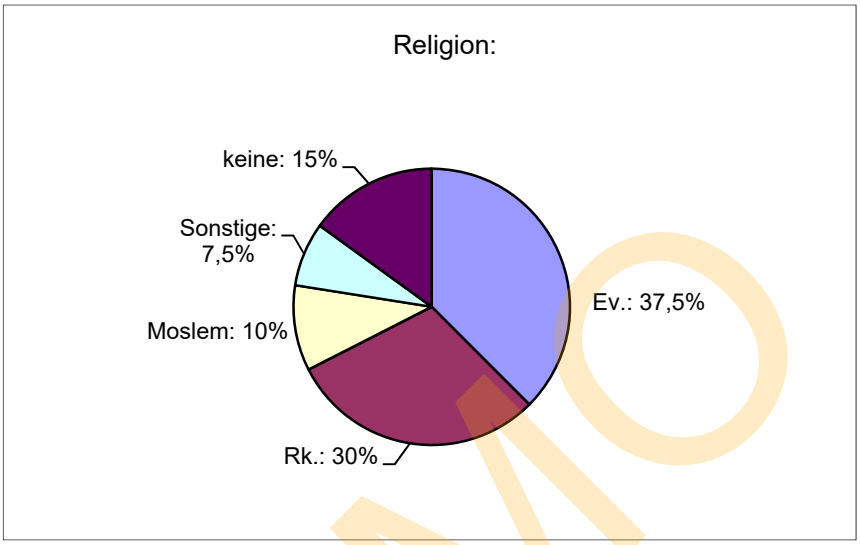
17% entsprechen $0{,}17 \cdot 360^{\circ} = 61{,}2^{\circ}$.

Zeichne mit unterschiedlicher Einfärbung ein Kreisdiagramm zu unserer Tabelle.

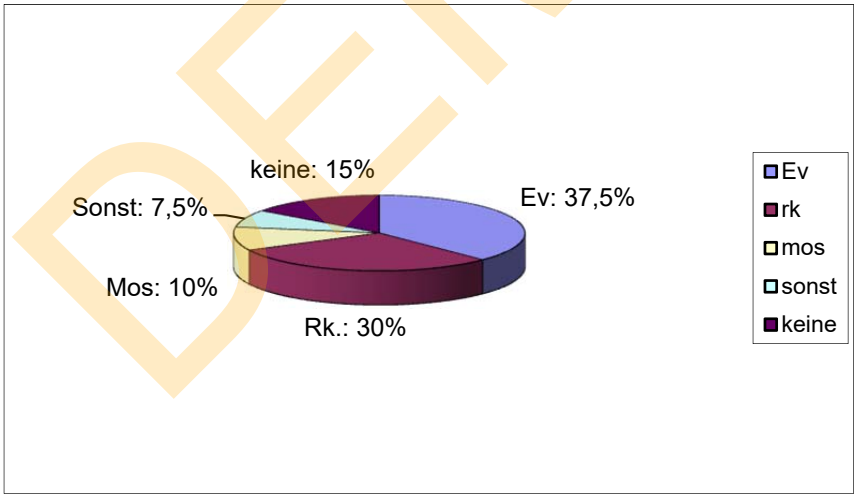
Die Umrechnung in die Winkelgrade sieht so aus:

Religion	Ev	Rk	Mos	Sonst	keine	Summe
Prozentuale Häufigkeit	37,5%	30%	10%	7,5%	15%	100%
Winkelgrad	135°	108°	36°	27°	54°	360°

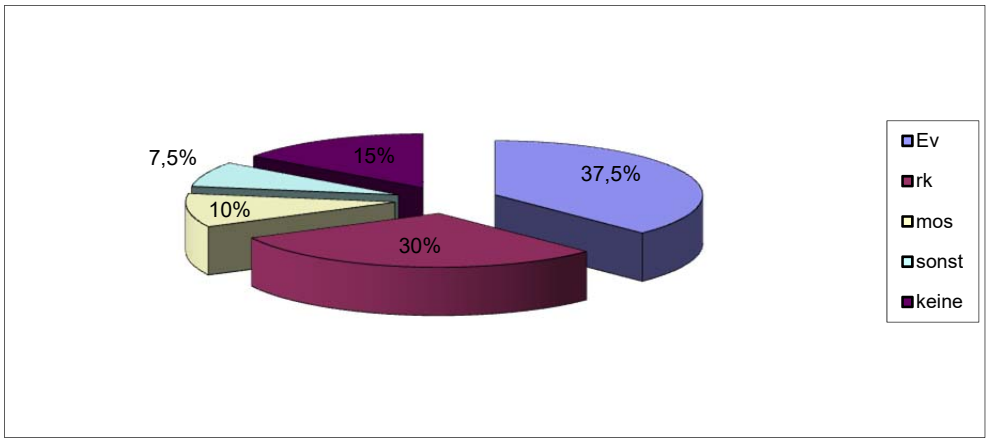
Hier die Lösung, erstellt mit EXCEL:



Mit dem Programm EXCEL oder anderen kann man diese Diagramme auch plastisch anzeigen lassen:



Oder so:

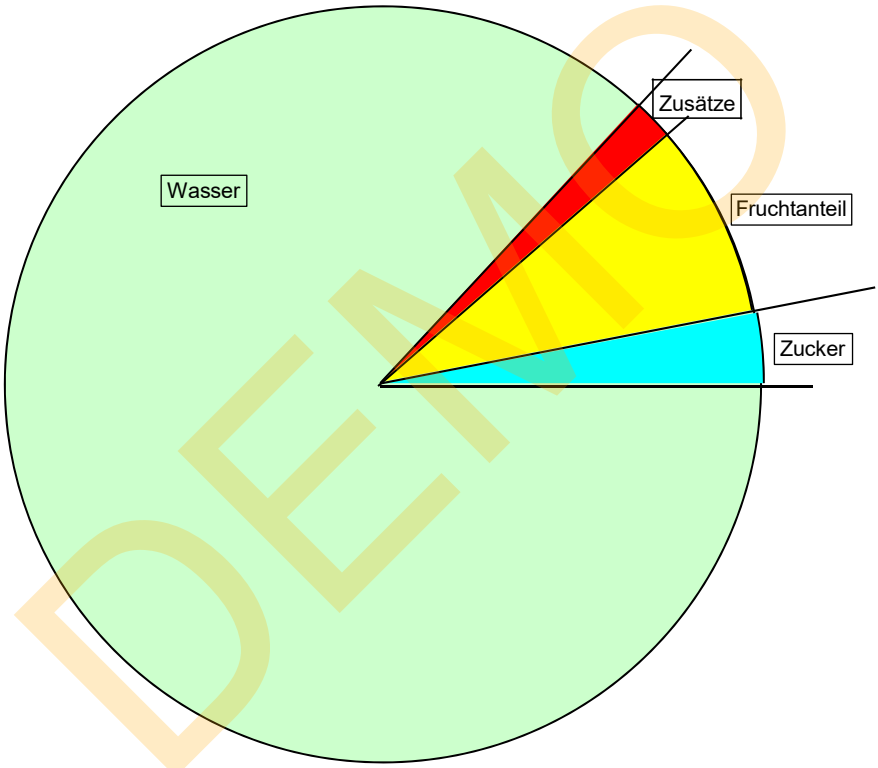


Beispiel 33

Bei der Analyse eines Getränks fand man in 1 Liter diese Bestandteile.

Fülle die Tabelle aus und erstelle ein Kreisdiagramm.

	Wasser	Zucker	Fruchtanteil	Zusätze	Summe
Absolute Häufigkeit	870 cm^3	30 cm^3	84 cm^3	16 cm^3	1000 cm^3
Relative Häufigkeit	0,87	0,03	0,084	0,016	1
Prozentuale Häufigkeit	87%	3%	8,4%	1,6%	100%
Winkelgrad	313°	11°	30°	6°	360°



Lösungen

Die Lösungen zu den Trainingsaufgaben gibt es nur im Originaltext
auf der Mathe-CD